Tentamen Complexe Analyse
8 Februari 2005, 09.00–12.00 uur

1. Definieer de functie $f(z)$ door $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.
   (a) Geef de maximale $R > 0$ aan zodat de functie $f(z)$ holomorf is op $\{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}$. Beargumenteer het antwoord.
   (b) De functie $f(z)$ bezit een machtreeksontwikkeling
   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$
   Wat is zijn convergentiestraal? (gebruik geen lim sup argument.)
   (c) Bereken de coefficienten a_n voor $n = 0, 1, 2$.

2. Definieer de functie $f(z)$ door $f(z) = e^{-z^2}$. Maak duidelijk waarom de functie $|f(z)|$ op de verzameling
   $$\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \}$$
   een maximum bezit. Bereken dit maximum en beargumenteer het antwoord.

3. Bereken de integraal
   $$\int_C \frac{z+5}{z(z-1)^2}\, dz,$$
   waarbij C de in positieve zin doorlopen cirkel met middelpunt 0 en straal 2 is.

4. Bereken de oneigenlijke integraal
   $$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$$
   via residuenrekening. Beargumenteer de wijze waarop het antwoord verkregen wordt.

5. Bereken de integraal
   $$\int_0^{2\pi} \sin^4\theta\, d\theta$$
   via residuenrekening.
   Aanwijzing: bedenk hoe een residu uit een Laurent-ontwikkeling wordt afgelezen.

(1)

a) De functie is op zich een mooie afleidbare functie, behalve mogelijk als de noemer 0 wordt. Dit is het geval als:

$$e^z - 1 = 0$$

$$e^z = 1$$

$$z = 2k\pi i$$

Voor het geval $k=0$ is de teller óók 0, dus kunnen we proberen de singulariteit op te heffen:

inderdaad ophefbare sing. maar argument niet helemaal correct

gebruik begrensdheid nabij 0 !

$$\frac{z}{e^z-1} = \frac{z}{1+z+\frac{1}{2!}z^2+hot-1} = \frac{z}{z+\frac{1}{2}z^2+hot} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z+hot}. \left(= \frac{1}{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+hot}\right)$$

9

Hier is dus geen probleem. Bij de andere polen is er wél een probleem, en de kleinste zit op ~~$2\pi i$~~ $z = \pm 2\pi i$. Dit betekent dat de functie ~~convergeert, en dus als holomorf is,~~ ~~op~~ een convergente machtreeksontwikkeling heeft, en dus ook holomorf is, voor $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\pi\}$, en ~~[illegible]~~ deze grens kan niet hoger vanwege de pool.

De gevraagde R is dan $R = 2\pi$.

b) Uit bovenstaande ~~[illegible]~~ zien we dat de machtreeks voor $|z| < R = 2\pi$ convergeert, en ~~[illegible]~~ voor een punt met $|z| = 2\pi$ niet, dus de convergentiestraal is $R = 2\pi$.

c) Als f convergent en holomorf is, kunnen we de coëfficiënten met Taylor uitrekenen:

$a_0 = f(0) = 1$, zoals we zien na het opheffen van de singulariteit.

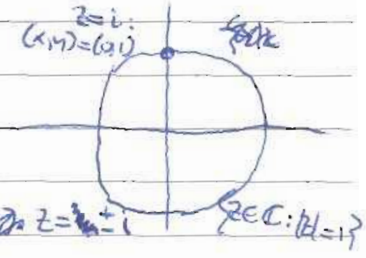
$$a_1 = f'(0) = \left.\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}z+hot}{(1+\frac{1}{2}z+hot)^2}\right|_{z=0} = \left.\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}z+hot}{1+z+hot}\right|_{z=0} = \underline{-\frac{1}{2}}.$$

$$a_2 = \frac{1}{2}f''(0) = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{(1+z+hot)(-\frac{1}{3}+hot)-(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}z+hot)(1+hot)}{(1+z+hot)^2}\right|_{z=0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \underline{\frac{1}{12}}$$

② $f(z)$ is een continue functie, en $\{z\in\mathbb{C} : |z|\le 1\} = \bar{D}$ is een compacte (immers gesloten en begrensd) verzameling, waaruit volgens Weierstrass volgt dat $|f(z)|$ een maximum heeft.

Bovendien is de functie holomorf, dus kan het maximum niet op de open verzameling $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ liggen: was dit zo, dan zou f daar lokaal constant zijn, en dus op de hele verzameling, wat niet zo is.

Het maximum zit dus op de rand $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$. Stel nu $z=x+iy$, met $x^2+y^2=1$. Dan:

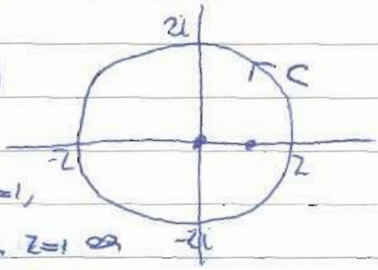


10 $$|e^{-z^2}| = |e^{-(x+iy)^2}| = |e^{-(x^2+2iy-y^2)}|$$
$$= |e^{y^2-x^2}|\cdot|e^{-2iy}| = |e^{y^2-x^2}| = e^{y^2-x^2}$$

Het is gemakkelijk in te zien dat dit maximaal is als $|y|$ maximaal is en $|x|$ minimaal, dus in het punt $z=\pm i$

Het gevraagde maximum is dan $e^{-i^2} = e$.

③ We weten dat geldt: als $f(z)=\frac{z+5}{z(z-1)^2}$ een eindig aantal polen $w_1, w_2, \dots, w_n$ binnen C heeft, dan



$$\int_C \frac{z+5}{z(z-1)^2}\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=w_i} f \cdot W(w_i,\gamma)$$

met $W(w_i,\gamma)=1$ voor alle i omdat we de cirkel positief doorlopen. Kandidaten voor polen zijn $z=0$ en $z=1$, en dit zijn ook allebei polen: $z=0$ een simpele pool en $z=1$ een pool van orde 2. Omdat $z=0$ een simpele pool is, geldt:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{z+5}{(z-1)^2}\Big|_{z=0} \cdot \operatorname{Res}_{z=0}\frac{1}{z} = 5\cdot 1 = 5.$$ rond $z=1$

Op $z=1$ geldt: $\frac{z+5}{z}$ is analytisch, zeg met machtreeksontwikkeling

10 $\frac{z+5}{z} = a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 +$ hot. Dan:

$$\frac{z+5}{z(z-1)^2} = \frac{a_0}{(z-1)^2} + \frac{a_1}{z-1} + a_2 + \text{hot}.$$

Dan is a_1 dus het gevraagde residu. Volgens Taylor geldt:

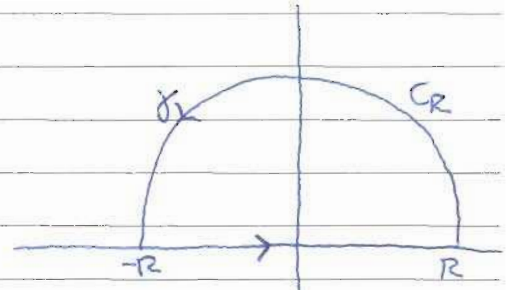
$$a_1 = \left[\frac{z+5}{z}\right]'\Big|_{z=1} = \frac{z-(z+5)}{z^2}\Big|_{z=1} = -5.$$

De conclusie luidt dan ook:

$$\int_C \frac{z+5}{z(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\cdot(5+-5) = 0.$$

(4)

We berekenen de integraal van de functie $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ over het pad γ dat rechts is weergegeven: de halve circel met straal R C_R, en het stukje reeële as $[-R,R]$.

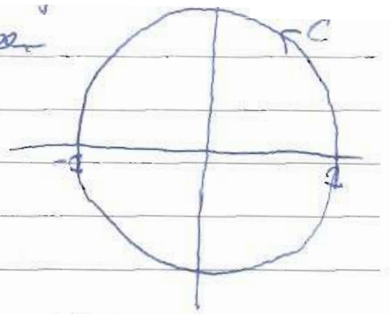


Volgens de residuenrekening geldt
$$\int_\gamma \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = 2\pi i \cdot \sum \mathrm{Res}_{w_i} f;$$
met w_i de polen van f binnen γ. Als we R willekeurig groot laten worden, zijn dit alle polen in het bovenhalfvlak. Welnu, mogelijke polen zijn
$$1+z^4 = 0$$
$$z^4 = -1$$
$$e^{i\varphi \cdot 4} = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$
$$z = e^{i\frac{1}{4}\pi} \vee z = e^{i\frac{3}{4}\pi} \vee z = e^{i\frac{5}{4}\pi} \vee z = e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$
Hiervan liggen $w_1 = e^{i\frac{1}{4}\pi}$ en $w_2 = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ in het bovenhalfvlak; we zijn dus geïnteresseerd in die twee residuen. Beide polen zijn simpel, dus:
$$\mathrm{Res}_{e^{i\frac{1}{4}\pi}} \frac{z^2}{1+z^4} = e^{i\frac{1}{2}\pi} \cdot \mathrm{Res}_{e^{i\frac{1}{4}\pi}} \frac{1}{1+z^4} = e^{i\frac{1}{2}\pi} \cdot \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{1}{4}\pi i}} = e^{i\frac{1}{2}\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{i-\frac{3}{4}\pi}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$$
$$\mathrm{Res}_{e^{\frac{3}{4}\pi i}} \frac{z^2}{1+z^4} = e^{i\frac{3}{2}\pi} \cdot \mathrm{Res}_{e^{\frac{3}{4}\pi}} \frac{1}{1+z^4} = e^{i\frac{3}{2}\pi} \cdot \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi i}} = e^{i\frac{3}{2}\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{9}{4}\pi i}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$
We concluderen $\int_\gamma \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left[e^{-\frac{1}{4}\pi i} + e^{-\frac{3}{4}\pi i}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi$. Ook ~~~~ weten we dat:
$$\int_{-R}^{R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz + \int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi,$$
En, aangezien $f(z)$ even is, geldt zelfs, als R dus voldoende groot:
$$2 \cdot \int_0^R \frac{z^2}{1+z^4}\,dz + \int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi. \qquad (1)$$
10 We bekijken de integraal over de circelschijf, dan geldt $|z| = R$, en
$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right| \le \int_{C_R} \left|\frac{z^2}{1+z^4}\right| dz \le \int_{C_R} \frac{|z|^2}{|1-|z|^4|}\,dz = \int_{C_R} \left|\frac{R^2}{1-R^4}\right| dz.$$
Nu gaat $\frac{R^2}{1-R^4}$ zich asymptotisch als $\frac{1}{R^2}$ gedragen, dus voor voldoende grote R geldt $\left|\frac{R^2}{1-R^4}\right| \le C \cdot \frac{1}{R^2}$ ~~plus~~ voor een of andere vaste C, dus
$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right| \le \int_{C_R} C \cdot \frac{1}{R^2}\,dz = C \cdot \frac{1}{R^2} \int_{C_R} dz = C \cdot \frac{\pi R}{R^2} = C \cdot \frac{\pi}{R}.$$
We concluderen dat voor $R \to \infty$ $\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz\right| \to 0$. Invullen van (1) geeft dan
$$2 \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi.$$
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi.$$

~~Methode geheel correct. Eindantwoord scheelt echter factor 2 met het onze~~

Sorry, het is wel oke..

met ~~over~~ $z = e^{i\varphi}$, wat betekent dat we voor z over de eenheidscircel C integreren, en er geldt:



$$dz = i \cdot e^{i\varphi} d\varphi$$
$$\Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{ie^{i\varphi}} = \frac{dz}{iz}$$

Bovendien geldt:

$$\sin^4\varphi = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)\right]^4 = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16} \cdot \left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(z^4 - 4z^2 + 6 - \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right)$$

Al met al vinden we zo:

$$\int_0^{2\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi = \int_C \frac{1}{16}\left(z^4 - 4z^2 + 6 - \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right) \cdot \frac{1}{iz} dz.$$
$$= \int_C f(z) dz \quad \text{met } f(z) = \frac{1}{16i} \cdot \left(z^3 - 4z + \frac{6}{z} - \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5}\right).$$

10

Deze integraal pakken we aan met residuenrekening. De enige pool is $z = 0$, en die ligt in C. Bovendien is het residu gemakkelijk te zien: dat is immers de coëfficiënt voor $\frac{1}{z}$, oftewel $\frac{6}{16i}$. Er geldt dus:

$$\int_0^{2\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi = 2\pi i \cdot \frac{6}{16i} = \frac{3}{4}\pi.$$